Міністерство освіти і науки України

Кам’янський державний енергетичний технікум

Циклова комісія природничо-наукових дисциплін

Методичні рекомендації

по вивченню тем «Тригонометрії»

Розробив: викладач вищої категорії

«викладач-методист» Котлярова О.В.

Кам’янське

2018

Анотація

Дана стаття містить приклади з методики викладання тем з розділу «Тригонометрія» з залученням раніше вивчених знань та направлені не на автоматичне запам'ятовування матеріалу, а на логічне розуміння основних понять та виводу формул. Дано рекомендації, які дозволяють запам'ятати основні математичні поняття та правила на більш простому рівні.

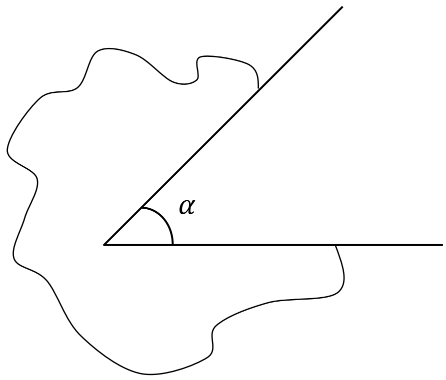
Рекомендована для студентів та учнів навчальних закладів, молодих викладачів, та будуть корисними всім викладачам, які навчають «Тригонометрії».

Деякі аспекти викладання окремих тем розділу «Тригонометрія»

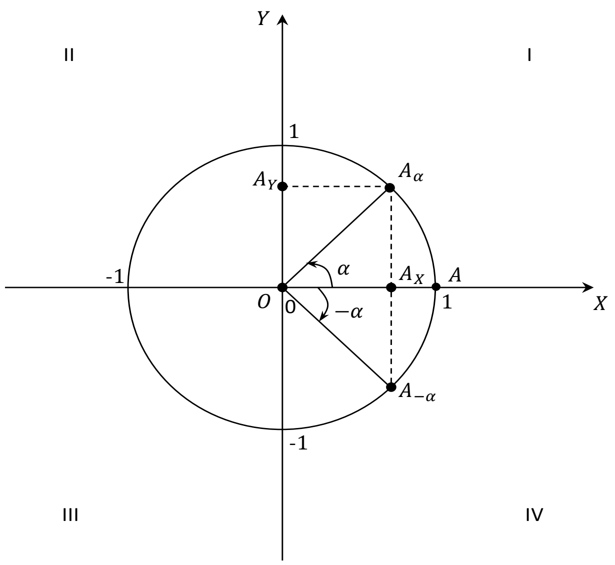
Вивчення в курсі математики розділу «Тригонометрія» є одним із найважчих для учнів із-за великої кількості формул та понять. Тому засвоїти основні правила і поняття, розраховуючи тільки на пам'ять, не вийде. Треба зрозуміти навчальний матеріал і це розуміння буде сприяти розвитку математичного мислення і якісному засвоєнню матеріалу, а також застосуванню його на практиці.

Хочу поділитися в даній статті своїм досвідом у викладанні навчального матеріалу.

На початку вивчення повторюємо з учнями визначення кута, яке ми знаємо з геометрії (кутом називається геометрична фігура, яка утворюється двома променями, що виходять з однієї точки).

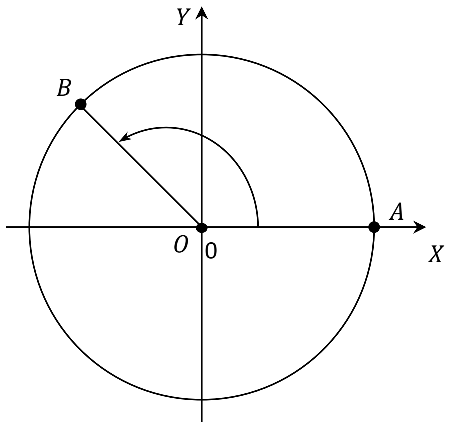


Евклід, який ввів таке означення кута, вважав найбільше його значення 180°, яке відповідає розгорнутому куту. Зараз ми розуміємо, що і друга частина

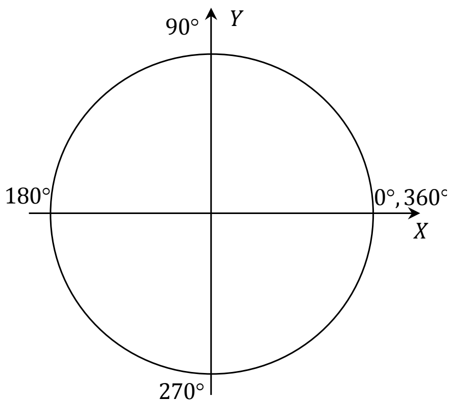


площини теж підходе під означення кута і його міра більша за 180°. Тому на кут пропоную подивитися з іншої точки зору. Для цього розіб’ємо нашу площину двома взаємно перпендикулярними прямими на чотири частини (квадранти). Точку перетину прямих приймемо за початок відліку О, задаємо напрями осей – горизонтальна X (зліва направо), вертикальна Y (знизу вгору) та виберемо на них одиничний відрізок. Виберемо вектор $\overline{\mathrm{OA}}$, початок якого є зафіксована точка O(0,0), а A(1,0), точка, яка лежить на осі OX. Почнемо обертати даний радіус-вектор навколо точки O. Тоді точка A буде описувати одиничне коло в нашій системі координат. Наголошуємо, що за додатній напрямок в математиці обирають обертання проти стрілки годинника , а за від'ємний – за стрілкою годинника. Відповідно до такого означення додатного напрямку, нумеруємо наші чверті. Якщо відхилимо початковий радіус-вектор $\overline{\mathrm{OA}}$ на кут α в додатному напрямку, то отримаємо A_{α}, якщо в від'ємному, - то $\mathrm{A}_{-\alpha}$.

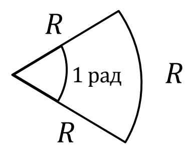
В геометрії міра кута α задається в градусах і 0°≤α≤180°. Що стосується кута повороту, то він може виражатися в градусах яким завгодно числом від -∞ до +∞. До того ж одній точці на колі буде відповідати безліч кутів, які можна відкласти як в додатному так і від'ємному напрямі та ще й додавати повні оберти.



Нехай при повороті на кут α початковий радіус OA перейде в радіус OB. В залежності від того, в якій координатній чверті опиниться радіус OB, кут α називають кутом цієї чверті. В даному випадку α-кут II чверті, так як точка B лежить в II чверті. Очевидно, що від додавання до кута цілого числа обертів отримуємо кут тієї ж чверті.



Пропоную учням розставити кути на нашому рисунку, які відповідають точкам перетину кола з осями координат.



Наголошую, що в тригонометрії використовується ще одна одиниця вимірювання кутів, яку називають радіаном. Кутом в один радіан називають центральний кут, якому відповідає довжина дуги, що дорівнює довжині радіуса кола. Радіанна міра кута не залежить від довжини радіуса і нею вимірюється довжина дуги, яку проходить наша точка А при обертанні навколо точки О. Тобто градусна міра застосовується при вимірюванні центрального кута, а радіанна – при вимірюванні окремої дуги, яку отримуємо в процесі обертання радіуса від початкового до кінцевого положення.

Визначимо як пов'язані між собою ці міри вимірювання кутів.

Довжині кола, яку окреслить наш вектор, відповідає центральний кут в 360°, тому з формули довжини кола $c = 2\pi R$, маємо:

$$2\pi R \sim 360^o$$

$$\pi R \sim 180^o$$

За умовою R=1, тому:

$$\pi \sim 180°$$

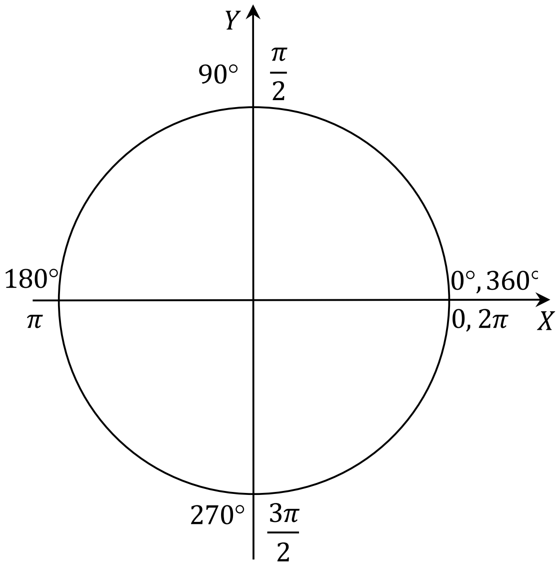
Звідси маємо

$$180° = \pi \text{ рад}$$

$$1^o = \frac{\pi}{180^o} \text{ рад.}$$

$$1° = 0{,}017 \text{ рад}, \quad 1 \text{ рад} \approx 57°17'44''$$

Доповнюємо наше коло радіанними значеннями кутів.



Розглянемо формули переходу з однієї міри в іншу з відношення 180°=π рад. Розділимо обидві частини рівності спочатку на 180°, а потім на π радіан, отримаємо:

$$\frac{180^o}{180^o} = \frac{\pi}{180^o}\text{ рад}$$

$$1^o = \frac{\pi}{180^o}\text{ рад}$$

$$n^o = \frac{\pi n^o}{180^o}\text{ рад},$$

Тому щоб перевести кут з градусної міри в радіанну треба далі значення кута помножити на $\frac{\pi}{180^o}$:

$$180^o = \pi\text{ рад}$$

$$\frac{180^o}{\pi} = \frac{\pi}{\pi}\text{ рад}$$

$$1\text{ рад} = \frac{180^o}{\pi}$$

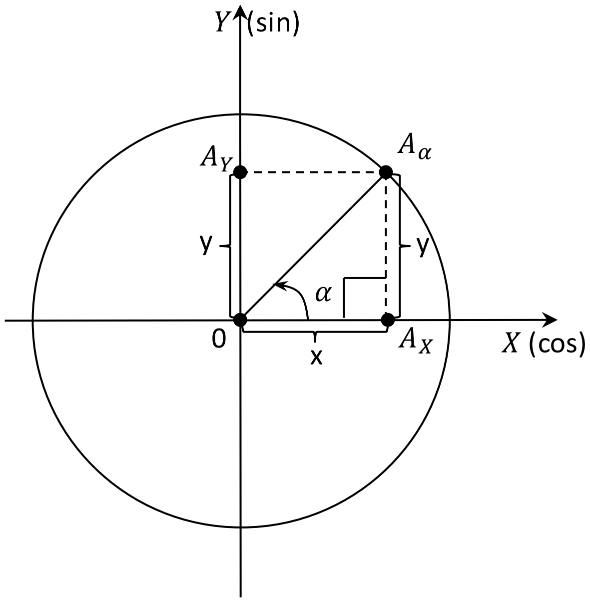
$$\alpha\text{ рад} = \alpha\frac{180^o}{\pi}$$

Тому щоб перевести кут з радіанної міри в градусну, треба дане значення кута помножити на $\frac{180^o}{\pi}$.

Наголошую, що радіан – це безрозмірна величина, тому при отриманні значення в радіанах градуси повинні скоротитися, а при переводі в градусну міру – повинні скоротитися радіани.

Далі розглядаємо прямокутний трикутник $\mathrm{OA}_\alpha\mathrm{A}_\mathrm{X}$ (кут $\mathrm{A}_\mathrm{X} = 90^o$). A_α – точка на колі з одного боку і точка в декартовій системі координат, тому її положення може бути задано парою чисел (x, y), які виразимо через функцію кута α, на котрий оберталася точка A.

Позначимо A_x, A_y – основи проекцій точки A_α на осі O_X та O_Y відповідно.



Тоді $x = OA_X$, $y = OA_Y$ за означенням координат точки з геометрії. Сторони прямокутного трикутника з гострим кутом пов’язуються означенням $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$, які вивчалися на геометрії і які пригадуємо.

Запис ведемо у вигляді опорного конспекту:

$$\sin\alpha = \frac{\text{прот. к.}}{\text{гіпо}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{прил. к.}}{\text{гіпо}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{прот. к.}}{\text{прил. к}}$$

де $OA_X = x$, $A_XA_\alpha = y$ – катети (к.),OA_α – гіпотенуза (гіпо)

Якщо діти не можуть запам’ятати означення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ (плутають їх), то наголосіть, що йде чередування букв «и $\leftrightarrow$ о», тобто якщо функція с<u>и</u>нус – катет пр<u>о</u>тилежний, якщо к<u>о</u>синус – пр<u>и</u>леглий. І обов’язково всі повинні знати означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута, тому також зручно записати (і заставити вивчити) ці означення до зошита:

$\frac{\text{синусом } (\sin\alpha)}{\text{косинусом } (\cos\alpha)}$ гострого кута α називається відношення $\frac{\text{протилежного}}{\text{прилеглого}}$ катета до гіпотенузи.

$\frac{\text{тангенсом}(\operatorname{tg}\alpha)}{\text{котангенсом}(\operatorname{ctg}\alpha)}$ гострого кута α називається відношення $\frac{\text{протилежного}}{\text{прилеглого}}$ катета до $\frac{\text{прилеглого}}{\text{протилежного}}$.

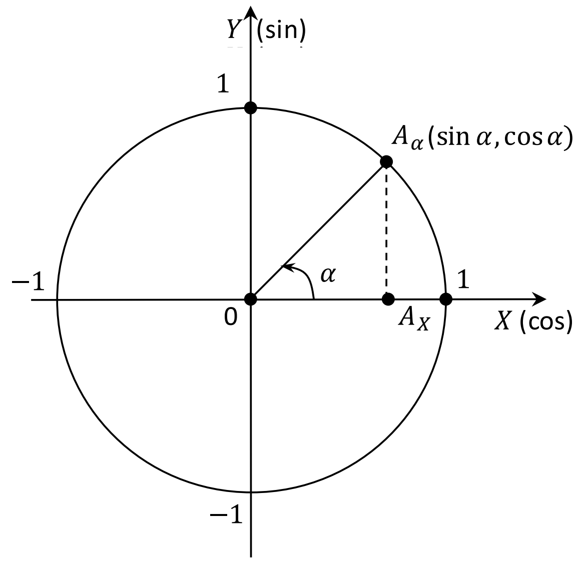
Тут два значення записані одним реченням. По «чисельнику» читаємо 1-ше означення, по «знаменнику» - 2-ге.

Таким чином, $OA_X = x = OA_\alpha \cos\alpha$ – прилежний до α катет, $A_\alpha A_Y = y = OA_\alpha \sin\alpha$ – протилежний катет.

За умовою $\mathrm{OA}_\alpha = 1$, тому $x = 1\cos\alpha = \cos\alpha$,

$$y = 1\sin\alpha = \sin\alpha$$

Тобто по осі X відкладаються всі значення $\cos\alpha$, а по осі Y – всі значення $\sin\alpha$



Так як точки A_α належать колу, то $-1 \le \cos\alpha \le 1, \quad -1 \le \sin\alpha \le 1.$

Основну тригонометричну тотожність теж отримаємо з прямокутного трикутника $\mathrm{OA}_\alpha\mathrm{A}_\mathrm{X}$, застосували теорему Піфагора: $\mathrm{OA}_\alpha^2 = \mathrm{OA}_\mathrm{X}^2 + \mathrm{A}_\alpha\mathrm{A}_\mathrm{X}^2$.

Підставивши значення сторін через функції кутів отримаємо:

$$1^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha,$$

або

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Значення синуса і косинуса для табличних значень кутів 30°, 45°, 60° легко запам’ятати , якщо виконати наступне завдання:

1) Записати перші три натуральні числа

1, 2, 3

2) Знайти з них корені квадратні

$$\sqrt{1} = 1, \qquad \sqrt{2}, \qquad \sqrt{3}$$

3) Розділити кожне на 2

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Якщо читати зліва на право, то це значення синусів по зростанню 30°, 45°, 60°. Якщо читати справа на ліво, то це значення косинусів 30°, 45°, 60°, відповідно.

До запита записуємо:

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \quad \overrightarrow{30°,\ 45°,\ 60°} \qquad\qquad \overleftarrow{30°,\ 45°,\ 60°} \quad \cos$$

тангенс і котангенс можна визначити з формул:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Для 0°, 90°, 180°, 270°, 360° значення тригонометричних функцій можемо знайти як відповідну координату точок, що відповідає в декартовій системі координат куту повороту.

Тож:

$$\sin 90^{o} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos 90^{o} = 1$$

$$\operatorname{tg} 90^{o} = \frac{\sin 90^{o}}{\cos 90^{o}} = \frac{1}{0} - \text{не існує}$$

$$\operatorname{ctg} 90^{o} = \frac{0}{1} = 0$$

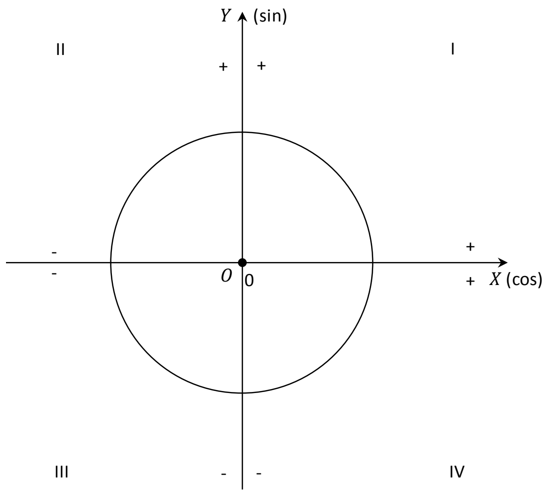
$$\sin 180^{o} = \sin \pi = 0$$

$$\cos 180^{o} = \cos \pi = -1$$

$$\mathrm{tg}\, 180^{o} = \frac{0}{-1} = 0$$

$\mathrm{ctg}\, 180^{o} = \frac{-1}{0}$ – не існує

Знаки тригонометричних функцій в координатних чвертях можна визначити як знаки півосей Ох, Оу.



$\cos \alpha$ приймає додатні значення в І та IV тому що Ох справа від О має додатні значення, і від’ємні в ІІ та ІІІ чвертях.

Аналогічно, Оу приймає додатні значення, якщо вони лежать вище осі Ох (вище О), тобто в І та ІІ чвертях функція $\sin \alpha > 0$, а в ІІІ , IV чвертях $\sin \alpha < 0$

Щоб знайти значення тригонометричних функцій кутів, більших за 90°, треба відповісти на три питання:

Чверть?   Знак?   Функція?

Формули зведення визначаю за таким правилом:

Ні

1) Якщо кут відкладається від горизонтальної осі (↔), то назва функції не змінюється, якщо кут відкладається від вертикальної осі (↕так), то змінюється на «кофункцію» ($\sin \alpha$↔$\cos \alpha$, $\mathrm{tg}\, \alpha$↔$\mathrm{ctg}\, \alpha$)

— III

$\sin 210^{0} = \sin(180^{0} + 30^{0})$=-$\sin 30^{0}$ =-$\frac{1}{2}$

На горизонтальній осі

2) Знак шуканої функції визначається знаком початкової функції, наприклад

Кут 210° лежить в III чверті, бо 180° < 210° < 270°, знак $\sin 210^{0}$ в III чверті «мінус», і назва функції не змінюється (якщо водимо головою вздовж осі Ох, то вона каже «Ні»), бо 180°, від якого відкладали гострий кут 30°, належить горизонтальній осі.

Якщо розписати цю саму функцію через вертикальну вісь, записавши 210

— III

$\sin 210^{0} = \sin(270^{0} - 60^{0})$= - $\cos 60^{0}$ =-$\frac{1}{2}$

На вертикальній осі

= 270°-60°, отримаємо:

Назва функції sin змінюється на cos, бо кут відкладається від вертикальної осі, а якщо на неї дивитися «вгору-вниз», то голова скаже «так» на запитання «Чи змінюється функція?»

Основні тригонометричні формули отримуємо з основної тригонометричної тотожності

$$(*)\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Якщо розділимо її послідовно на $\sin^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha$:

(*)$\sin^2 \alpha$, отримаємо:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Якщо $\frac{1}{\sin^2\alpha}=cosec\,\alpha$ (косеконс), тоді:

$$1+ctg^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$$

(*)$\cos^2\alpha$, отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Якщо $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec\alpha$ (секонс), тоді:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\sec\alpha$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha\\ \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\alpha\end{array}\right\}=>tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$$

Тож, як бачимо, розуміння початкових понять теми веде не до автоматичного запам’ятовування, а зводиться до простих математичних міркувань та дій, що сприяють розвитку математичного мислення та не відлякують від вивчення матеріалу.